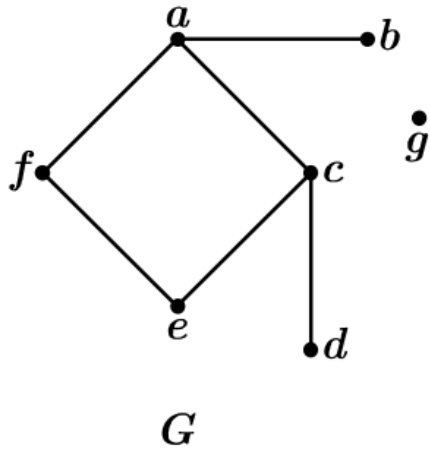


فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

درس اول: معرفی گراف

رئوس متصل به رأس

رئوس
پایه‌ها
تعداد پایه‌ها
مرتبه، اندازه، درجه و همسایگی در گراف



$$q = 6 \text{ (اندازه)}, p = 7 \text{ (مرتبه)}$$

$$\sum \deg(v_i) = 2q = 2 \times 6 = 12$$

۱) در گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

ب) مجموع درجات گراف را مشخص کنید.

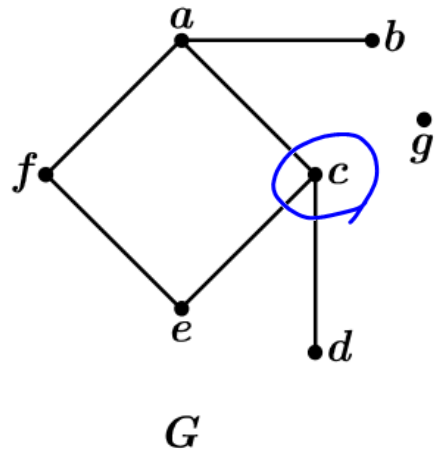
پ) حاصل $N_G(a)$ و $N_G[b]$ را مشخص کنید.

$$\begin{cases} N_G(a) = \{b, c, f\} \\ N_G[b] = \{a, b\} \end{cases}$$



گراف مکمل

۲) در گراف مقابل، حاصل $q(\bar{G})$ و $\deg_{\bar{G}}(c)$ را به دست آورید.



$$\begin{cases} p = 7 \\ q = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} - q(G) = \frac{7 \times 6}{2} - 6 = 21 - 6 = 15 \\ \deg_{\bar{G}}(c) = (p-1) - \deg_G(c) = \frac{7-1}{2} - 3 = 3 \end{cases}$$



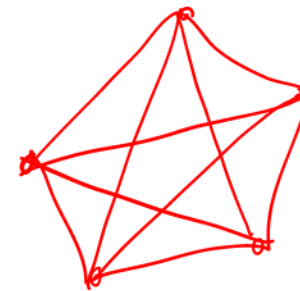
گراف کامل

(۳) مجموع درجات گرافی برابر ۲۴ است. اگر سه یال به این گراف اضافه شود، گراف حاصل، گراف کامل می‌شود. مرتبه گراف G چقدر است؟

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 24 \Rightarrow 2q = 24 \xRightarrow{\div 2} q = 12$$

با اضافه شدن ۳ یال $\rightarrow q + 3 = q(K_p) \Rightarrow 12 + 3 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 15 = \frac{p(p-1)}{2}$

$$\rightarrow p(p-1) = 30 = 6 \times 5 \rightarrow p = 6$$



$$K_p \rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$$



گراف منتظم

(۴) به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم، چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟

$$p = 8, r = 3 \rightarrow rp = 24 \Rightarrow 3 \times 8 = 24 \Rightarrow 24 = 2q \Rightarrow q = 12$$

$$K_8 = \text{گراف کامل} \rightarrow q(K_8) = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$p = 8$ رأسی

$$\Rightarrow 28 - 12 = 16 \quad \text{تعداد یال‌هایی که باید اضافه کرد}$$

$$\deg(v_i) = r \Rightarrow rp = 2q$$

گراف منتظم: r



پویش علمی
ماندگار البرز



دور، مسیر و زیر گراف

۵) گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ مفروض است. اگر داشته باشیم:

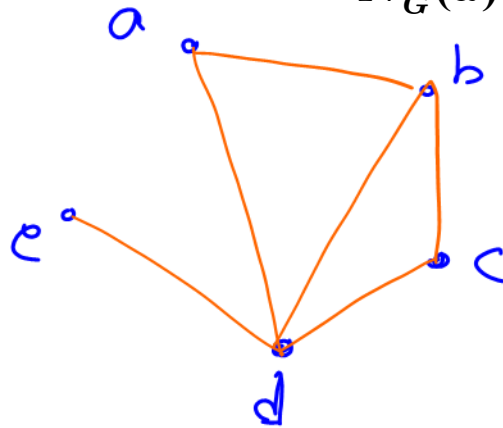
$$N_G(d) = \{a, b, c, e\}, N_G(c) = \{d, b\}, N_G(b) = \{a, d, c\}$$

الف) گراف G را رسم کنید.

ب) یک دور به طول ۴ از گراف G بنویسید.

پ) یک زیر گراف از G با مرتبه ۴ و اندازه ۳ رسم کنید.

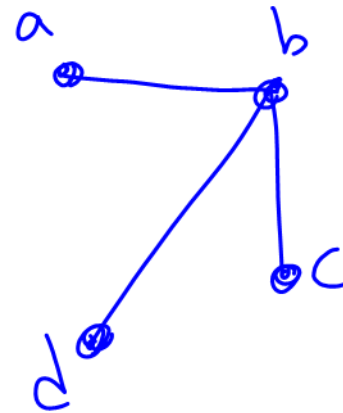
ت) یک مسیر از a به e به طول ۳ بنویسید.



(الف)

۱) $abcda$

۲)



$\Rightarrow abde$



پویش علمی
ماندگار البرز



درس دوم: مدل‌سازی با گراف

مجموعه احاطه گر

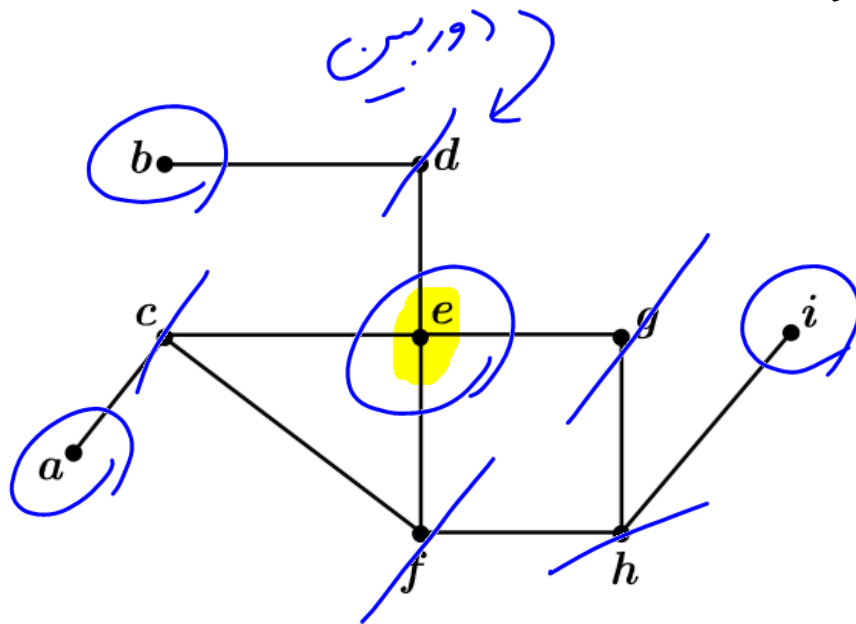


پویش علمی
ماندگار البرز

۶) گراف زیر را در نظر بگیرید.

الف) یک مجموعه احاطه گر سه عضوی برای این گراف بنویسید.

ب) به مجموعه $A = \{a, b, i\}$ کدام رأس اضافه شود تا مجموعه حاصل، احاطه گر شود؟

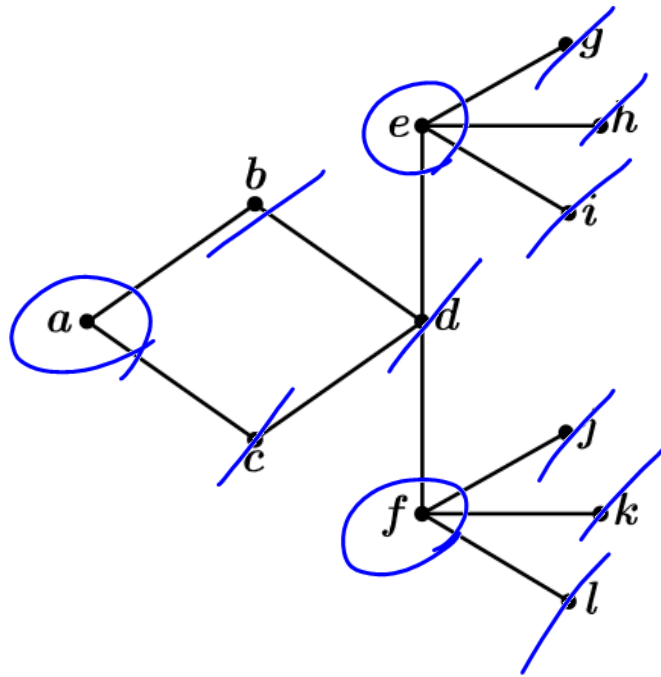


الف) $\{d, c, h\}$

ب) $\{a, b, i, e\}$



$$n = 12, \Delta = 2$$



مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نیمم و عدد احاطه‌گری

(۷) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ذکر دلیل به دست آورید.

$\gamma(G)$

$$\text{قضیه: } \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = 4$$

$$\rightarrow \gamma(G) \geq 4$$

از طرفی مجموعه $\{e, f, a\}$ احاطه‌گر است و چون

$$\gamma(G) \geq 4, \text{ پس } \gamma(G) = 4 \text{ خواهد بود.}$$

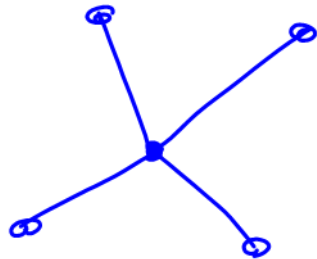


پویش علمی
ماندگار البرز

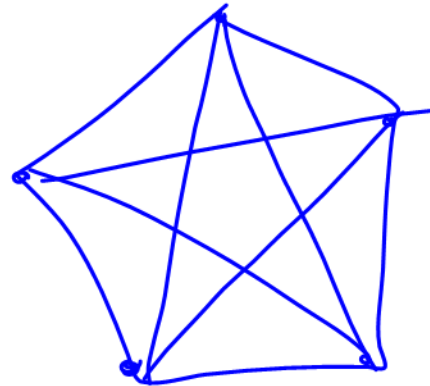


۸) در گراف G از مرتبه ۵، $\gamma(G) = 1$ ، حداقل و حداکثر تعداد یال‌های گراف G را تعیین کنید.

$$p = 5$$



$$q_{(min)} = 4$$



$$q_{(max)} = q(K_5) = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$



پویش علمی
ماندگار البرز



(الف) یک گراف ۸ رأسی رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

(ب) یک گراف ۸ رأسی رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد؟

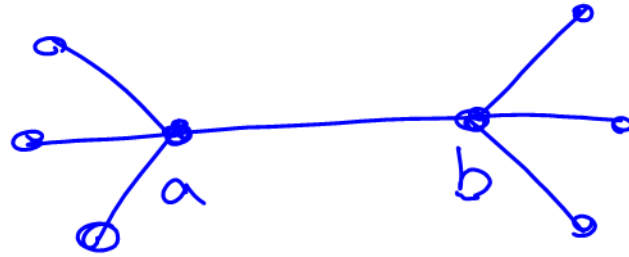


پویش علمی
ماندگار البرز



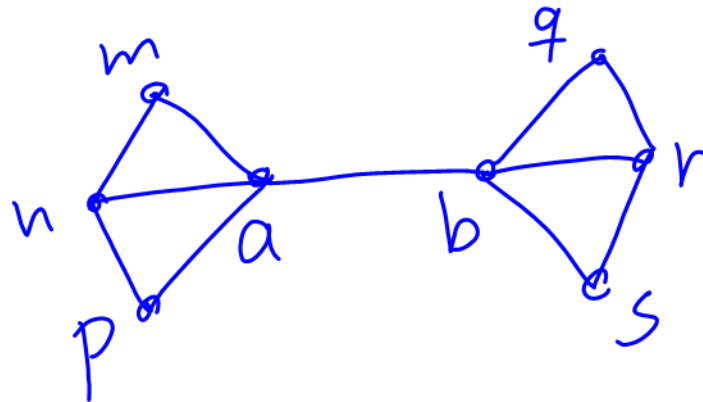
پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

(الف)



→ مجموعه احاطه گر: $\{a, b\}$

(ب)



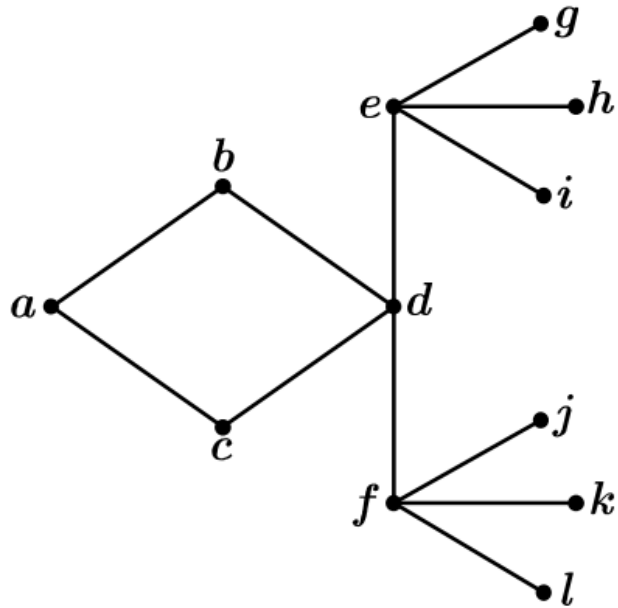
→ مجموعه احاطه گر: $\{a, b\}, \{a, r\}, \{n, b\}$

مجموعه احاطه گر می‌نیمال

۱۰ در گراف مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) یک مجموعه احاطه گر می‌نیمال ۸ عضوی بنویسید.

ب) یک مجموعه احاطه گر غیر می‌نیمال ۴ عضوی بنویسید.



الف) $\{g, h, i, j, k, l, b, c\}$

ب) $\{e, f, a, d\}$

مجموعه احاطه گر بالا غیر می‌نیمال است، زیرا با حذف d باز هم احاطه گر می‌ماند.



پویش علمی
ماندگار البرز



(۱۱) در گراف P_{12} ،الف) یک γ -مجموعه از آن مشخص کنید.ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینمال ۶ عضوی از آن را مشخص کنید.پویش علمی
ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

الف)



$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \Rightarrow \gamma(P_{12}) = \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = 4 \rightarrow \gamma = \{a_2, a_5, a_8, a_{11}\}$$

$$\gamma = \{a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}\}$$